

## Programas de Actividades Curriculares – Plan 94A

Carrera: Ingeniería Mecánica

### **CÁLCULO AVANZADO**

**Área:** Matemática

**Bloque:** Ciencias Básicas

**Nivel:** 3ª año **Tipo:** Obligatoria

**Modalidad:** Anual

**Carga Horaria total:** Hs Reloj: 72 Hs. Cátedra: 96

### **FUNDAMENTACIÓN**

El desarrollo de los métodos numéricos y el avance continuo de la computación, tanto en programas como en equipos, hacen que el Ingeniero Civil pueda disponer de herramientas para resolver problemas de Ingeniería anteriormente restrictas a especialistas o que eran sumamente costosas.

Se hace por ello necesario que el estudiante tecnológico cuente con una asignatura de introducción a las técnicas numéricas más usuales y al uso de programas aplicativos de computación para la solución de problemas de ingeniería

### **OBJETIVOS**

Tomar conciencia del valor de la Matemática para resolver problemas básicos de la Ingeniería.

Concebir a la Matemática como una práctica social de argumentación, defensa, formulación y demostración.

Analizar las características de una función de variable compleja.

Incorporar el concepto de diferenciabilidad de funciones de variable compleja

Interpretar las propiedades de las funciones analíticas para el cálculo de Integrales en el campo complejo.

Identificar las singularidades de las funciones de variable compleja analizando su desarrollo en serie de Laurent.

Utilizar adecuadamente el teorema del residuo para calcular integrales reales y para la resolución de problemas de ingeniería.

Comprender el concepto de aproximación por Serie de Fourier

Comprender que la elección de una base de la forma  $e^{j\omega t}$  minimiza el error cuadrático medio.

Comprender la Integral de Fourier y el concepto de Transformación Integral.

Utilizar la Teoría de Fourier para resolver problemas concretos de Ingeniería.

Utilizar la Serie de Fourier para resolver problemas de contorno.

Entender el concepto de frecuencia compleja.

Comprender la Transformada de Laplace como una herramienta del cálculo operacional.

Resolver ecuaciones diferenciales por Transformada de Laplace.

Comprender el Concepto de Función de Transferencia y diagrama de polos y ceros.

Adquirir la capacidad de modelizar un sistema lineal y estudiar el comportamiento del mismo a través de su función de transferencia.

Utilizar los métodos de cálculo de raíces de ecuaciones decidiendo la conveniencia y estimando la precisión de cada uno.

Comprender la diferencia entre interpolación y aproximación por mínimos cuadrados.

Conocer los métodos de diferenciación e integración numérica.

Analizar la conveniencia de aplicar los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales.

## **CONTENIDOS**

- Contenidos mínimos
  - Funciones de Variable Compleja.
  - Limite, Continuidad de Funciones de Variable Compleja.
  - Diferenciabilidad. Funciones Analíticas.
  - Integración en el campo complejo.
  - Sucesiones y Series. Series Funcionales de Taylor y Laurent.
  - Teorema del Residuo.
  - Resolución de Integrales Reales.
  - Series y Transformadas de Fourier.
  - Problemas de Contorno
  - Transformada de Laplace.
  - Cálculo numérico de raíces de ecuaciones.
  - Interpolación y aproximación de funciones.

- Diferenciación e integración numérica.
- Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Contenidos analíticos

## **Unidad Temática I: *EL NÚMERO COMPLEJO***

### **I.1: DEFINICIÓN**

La Unidad Imaginaria. Potencias sucesivas de la unidad imaginaria. Propiedades de los números complejos. Representación cartesiana de los números complejos. Representación polar. Expresión binómica del número complejo. Expresión exponencial. Producto de un número complejo por la unidad imaginaria. Fórmula de De Moivre. División de números complejos. Complejos conjugados. Propiedades del Módulo de un Número complejo. Desigualdad Triangular. Correspondencia entre el conjunto de los números complejos y los puntos del plano.

### **I.2: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA**

Definición. La función potencial. Potencias de exponente negativo. Función raíz enésima de  $z$ .

Función exponencial. Función logaritmo de  $z$ . Función potencial de exponente complejo. Valor principal. Funciones trigonométrica e hiperbólica.

### **I.3: LÍMITE, CONTINUIDAD, DERIVADA**

Entorno de un punto. Definición y propiedades. Dominio de una función de Variable Compleja. Conexidad. Puntos Singulares. Singularidad esencial. Punto de acumulación. Límite, definición. Condiciones de existencia del límite Propiedades de los límites. Límites infinitos. Límite en el infinito. Condiciones de existencia. Continuidad. Definición. Diferenciabilidad de las funciones de Variable Compleja. Funciones Analíticas. Definición.

Existencia de la Derivada. Condiciones de Cauchy- Riemann. Cálculo de derivadas. Ecuación de Laplace. Funciones Armónicas. Definición, Propiedades. Conjugada Armónica. Obtención de la Conjugada. Representación plana de funciones conjugadas: Curvas de nivel.

### **I.4: INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO**

Funciones complejas de variable real. Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real. Valor absoluto de la integral. Concepto de arco. Expresión paramétrica del arco. Arco de Jordán. Longitud del arco. Concepto de integral en el campo complejo. Funciones Analíticas: Independencia de la integral respecto del camino de integración. Teorema de Green. Teorema de Cauchy Goursat en dominios múltiplemente conexos. Propiedades de la integral en el campo complejo. Propiedades del módulo de la integral. Teorema fundamental del cálculo integral. Teorema de la derivada enésima. Aplicación del teorema de la integral de Cauchy al cálculo de integrales de funciones de variable real y de variable compleja.

### **I.5: SUCESIONES Y SERIES EN EL CAMPO COMPLEJO**

Sucesiones de números complejos. Convergencia. Condiciones de existencia de límite. Sucesiones de funciones de variable compleja. Series de números complejos. Suma parcial. Resto. Convergencia Absoluta. La serie Geométrica. Series de funciones de variable compleja. Criterios de convergencia.

Convergencia puntual. Prolongación analítica. Serie de Taylor. Desarrollo de una función analítica en serie de Taylor. Serie de Laurent. Desarrollo de funciones en Serie de Laurent. Parte principal. Definición de residuo.

## I.6: EL TEOREMA DEL RESIDUO

Residuos en los polos de una función. Definiciones. Aplicación al cálculo de integrales. Teorema de los residuos de las funciones de variable compleja. Cálculo de residuos. Residuos en polos múltiples. Aplicación al cálculo de integrales impropias de funciones de variable real. Cálculo de integrales definidas cuyo integrando contiene funciones trigonométricas.

## Unidad Temática II: *ANÁLISIS DE FOURIER*

### II.1: SERIE DE FOURIER

Periodicidad de las señales de variable continua. Período y frecuencias fundamentales. Familias de funciones periódicas. Funciones ortogonales y ortonormales. Desarrollo de funciones en serie de Fourier. Determinación de los coeficientes. Funciones de periodo distinto de  $2\pi$ . Expresión compleja de la serie de Fourier. Condiciones de convergencia de Dirichlet. Serie generalizada de Fourier. Desarrollos típicos de funciones: Funciones Circulares, Rectangular, Triangular, Diente de Sierra. Desarrollo de funciones pares e impares. Fenómeno de Gibbs. Aproximación de funciones. Error cuadrático. Minimización del error.

Ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales. Aplicación de la serie de Fourier para la resolución de problemas de contorno.

### II.2: INTEGRAL Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Concepto de cálculo operacional. Operadores: definición, ejemplos. Espectro de frecuencia de una función periódica. Funciones no periódicas: Integral de Fourier. Núcleo de la Integral: La transformada de Fourier. Espectro continuo. Condiciones de existencia de la transformada. Integral de Fourier de una función real. Transformadas seno y coseno de Fourier. Propiedad de escalamiento. Propiedades de desplazamiento en tiempo y en frecuencia. Cálculo de Integrales de Fourier. La función Seno integral. Integral de Fourier de un pulso rectangular aislado: La función signo de  $x$ . Densidad de energía de la señal: Relación de Parseval. Propiedad de Convolucion. Propiedad de Modulación.

## Unidad Temática III: *TRANSFORMADA DE LAPLACE*

### III.1: TRANSFORMADA BILATERAL Y UNILATERAL

Condiciones de existencia de la transformada. Propiedades. Relación entre las transformadas de Fourier y Laplace. Transformada de la derivada de una función. Transformada de la integral. Propiedades de desplazamiento en tiempo y en frecuencia. Transformadas de las funciones elementales. Transformada de la función impulso. Transformada de la Función Escalón. Calculo de las transformadas por derivadas de otras conocidas. Tablas de transformadas de Laplace.

### III.2: TRANSFORMADA INVERSA

Obtención de la función primitiva por cálculo directo. Calculo de primitivas por descomposición en fracciones simples. Teoremas del valor inicial y del valor final. Resolución de ecuaciones diferenciales e integro diferenciales con coeficientes constantes por medio de la Transformada de Laplace.

Procedimientos generales para obtener la función primitiva. Teorema de Heaviside. Teorema de Riemann-Mellin. Método de Residuos.

#### **Unidad Temática IV: METODOS NUMERICOS**

##### **IV.1: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO - TEORÍA DE ERROR**

Introducción a los métodos numéricos. Tipos de errores. Representación de números en una máquina. Error absoluto y relativo. Redondeo simétrico y truncado. Estimación de cotas de error. Propagación de errores con las operaciones.

##### **IV.2: CÁLCULO DE RAÍCES DE ECUACIONES**

Raíces o ceros de una función. Repaso de Teorema de Bolzano y Rolle. Identificación de un intervalo que contenga la raíz. Selección del método y la precisión. Radio y orden de convergencia. Criterios de detención del proceso iterativo. Método de bisección. Método iterativo de punto fijo. Método de la cuerda o Regula - Falsi. Método de Newton - Raphson. Ventajas y desventajas de cada uno. Acotación de raíces de ecuaciones polinómicas: Regla de Laguerre - Thibault. Regla de Descartes. Ejemplos de aplicación.

##### **IV.3: INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN DE FUNCIONES**

Interpolación. Teorema de Lagrange. Método de Lagrange. Diferencias finitas. Método de Newton - Gregory progresivo y regresivo. Conveniencia del uso de cada uno. Interpolación polinomial a trozos. (Splines cúbicas) Ajuste de curvas por Mínimos Cuadrados. Caso discreto y caso continuo. Polinomios de Legendre. Ejemplos de aplicación.

##### **IV.4: DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

Aproximación numérica de la derivada por diferencias progresivas, regresivas y centrales. Integración numérica: Método de Trapecios. Estimación del error. Método de Simpson. Estimación del error.

##### **IV.5: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES**

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Problemas de valor inicial. TEOREMA de existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial. Condición de Lipschitz. Resolución numérica de problemas de valor inicial. Error de truncamiento local. Métodos de paso simple y de paso múltiple. Método de Euler. Interpretación geométrica. Método de Taylor. Métodos de Runge - Kutta de segundo orden y de cuarto orden. Métodos predictor - corrector. Fórmulas implícitas y explícitas. Método de Adams - Bashforth - Moulton. Método de Milne - Simpson. Cuándo aplicar cada uno. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Métodos de Euler y Runge - Kutta. Ecuaciones diferenciales de orden superior. Reducción a sistemas de primer orden. Ejemplos de aplicación.

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Método de diferencias finitas. Ejemplos.

#### **BIBLIOGRAFÍA OBLIGATORIA**

Hauser, A Arthur. (1973). Variable Compleja. Colombia. Editorial: Fondo Educativo Interamericano.

Derrick, William.(1987). Variable Compleja con Aplicaciones. Colombia. Editorial: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hwei, P Hsu . (1987) Análisis de Fourier. Colombia. Editorial: Grupo Editorial Iberoamericana.

Kaplan, Wilfred. (1967). Calculo Avanzado. México. Editorial: C.E.C.S.A

Nakamura. (2000). Analisis Numerico y Visualizacion Grafica con MATLAB. Mexico. Editorial: Prentice Hall.

Spiegel, Murray. (1990). Variable Compleja .México. Editorial: Mc Graw Hill.

Wunsch, David. (1997). Variable Compleja con Aplicaciones. Estados Unidos. Editorial: Addison Wesley Iberoamericana.

Balanzat, Manuel. (1997). Matemática Avanzada para la Física. Argentina. Editorial: EUDEBA.

Spiegel, Murray. (1995). Transformada de Laplace. México. Editorial: Mc. Graw Hill.

Krasno y otros. (1976). Funciones de Variables Complejas. Calculo Operacional y Teoría de la Estabilidad. Argentina. Editorial: Reverte.

Mathews, J, Kurtis F. (1999). Metodos Numericos con MATLAB. España. Editorial: Prentice Hall.

Chapra, Raymond, Canale. (2007). Metodos Numericos para ingenieros. México. Editorial: Mc Graw Hill.

Scheid, Di Constanzo. (1991). Metodos Numericos Serie Schaum. Mexico. Editorial:Mc Graw Hill.

Burden y Faires. (1985). Analisis Numerico. México. Editorial: Iberoamérica.

Kreyszig. (2000). Matemática avanzadas para ingeniería. México. Editorial: Limusa.

Pipe, J .(1963). Matematica aplicada para ingenieros y fisicos. Estados Unidos. . Editorial: Mc Graw Hill.

### **Bibliografía Complementaria**

Churchil R. V. (1990). Teoría de Funciones de Variable Compleja. España. . Editorial: Mc Graw Hill.

Volkvyskii L.I., Lunts G.L. y Aramanovich I.G. (1991). A collection of Problems on Complex Analysis. Moscu. Editorial: Dover.

Levinson y Redheffer. (1990). Curso de Variable Compleja. España. Editorial: Reverte.

Tranter, C. J. (1964). Transformadas de la Física Matemática. Mexico. Editorial: UTEHA.

Kincaid D. y Cheney (1994). Analisis Numerico. EE. UU. Editorial: Iberoamericana.

Nacamura, Schoichiro. (1994). Metodos numericos aplicados con software. México Editorial: Prentice Hall.

Akai Terence J. (1999). Metodos numericos aplicados a la ingenieria. México. Editorial: Limusa.

García Merayo, F y Nevot Luna, A. (1962). Analisis Numerico. España. Editorial: Paraninfo.

O' Neill, Peter. (2004). Matematica avanzada para ingenieria. España. Editorial: Thomson.

Torres Czitron, (1980). Métodos para la solución de problemas con computadora. México. Editorial: Representaciones y Servicios de Ingeniería.

Ralston y Wilf. (1960). Mathematical methods for digital computers Vol. I y II" , EE. UU. Editorial:Wiley & Sons.

Grove, Wendell E. (1966). Brief numerical methods. EE.UU. Editorial: Prentice Hall