TEOREMAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

2.1 Teoremas de THEVENIN Y NORTON y MILLMAN

Pasivado de fuentes

Una fuente queda pasivada cuando el módulo de su magnitud eléctrica se hace cero (No tiene más capacidad de aportar energía eléctrica).

Pasivar una fuente de tensión significa llevar el módulo de su fuerza electromotriz a cero, o sea cortocircuitarla, ya que para cualquier valor de la corriente no debe variar la tensión. En la figura 2.1 se muestra la equivalencia circuital de las fuentes de tensión pasivadas.

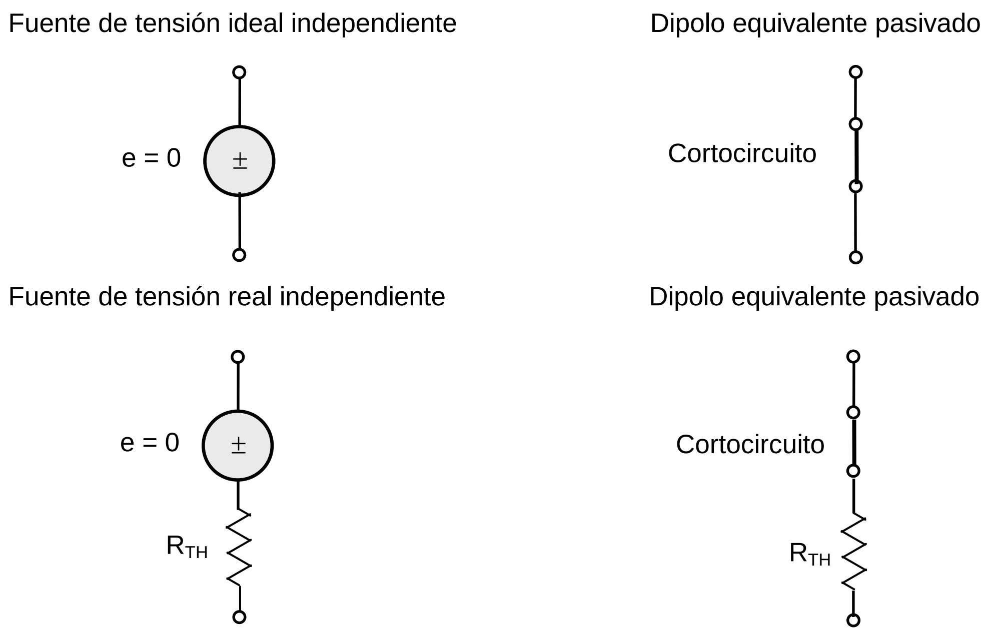


Figura 2.1 Equivalencia circuital de fuentes de tensión pasivadas

Pasivar una fuente de corriente, significa abrir el circuito, ya que la corriente es independiente de la tensión en sus terminales. En la figura 2.2 se observa la equivalencia circuital

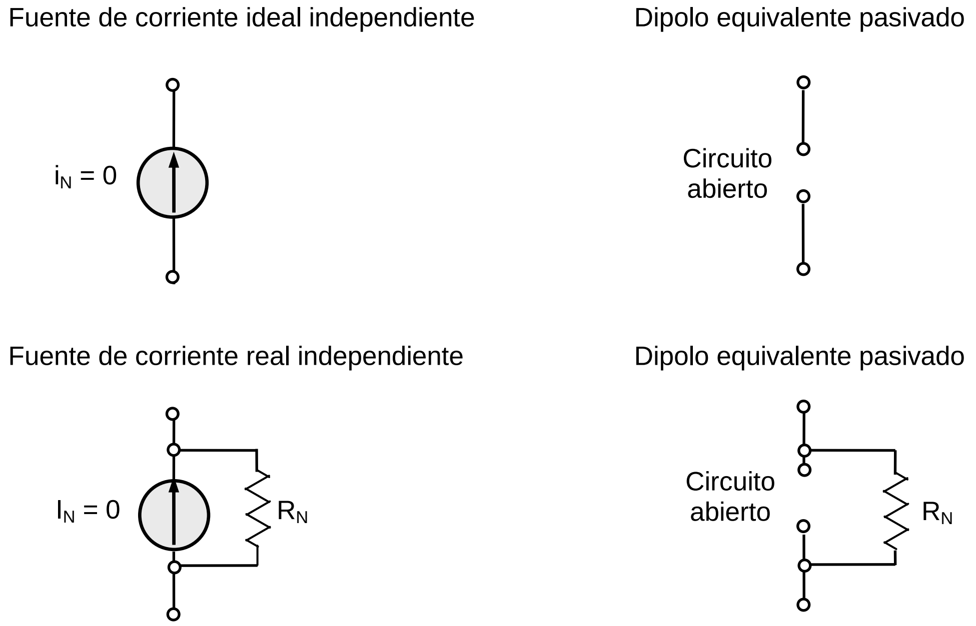


Figura 2.2 Equivalencia circuital de fuentes de corriente pasivadas

Teorema de THEVENIN

La corriente de una rama de un circuito, es la misma que se obtendría reemplazando el resto del circuito por una fuerza electromotriz real, cuya "E_{TH}" es igual a la diferencia de potencial entre sus extremos, con la rama abierta, en serie con una resistencia equivalente al resto del circuito, vista desde dichos extremos y **pasivando** las fuentes **independientes**.

Tomemos el ejemplo de la figura 2.3.

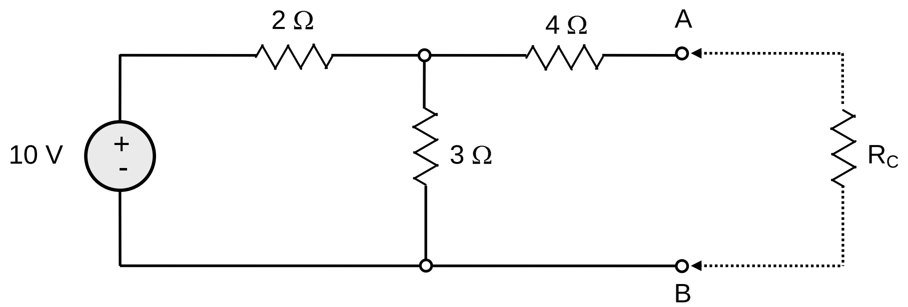
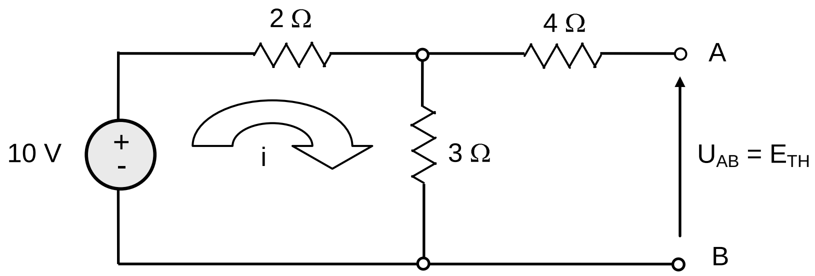


Figura 2.3 Circuito de análisis

Para determinar la E_{TH}, el circuito nos queda:

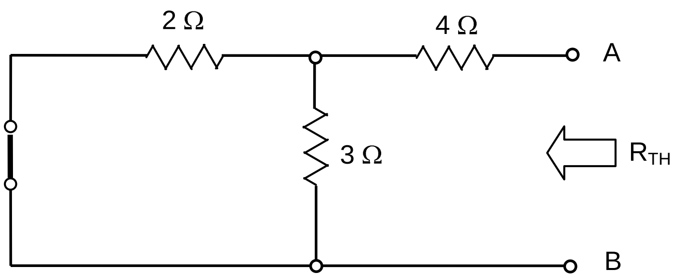


La tensión entre los bornes A y B, es igual a la caída de tensión en la resistencia de 3 Ω. La corriente sobre dicha resistencia está dada por:

$$i = \frac{10}{2+3} = 2\ \text{A}$$

$$E_{TH} = U_{AB} = 3.\ 2 = 6\ \text{V}$$

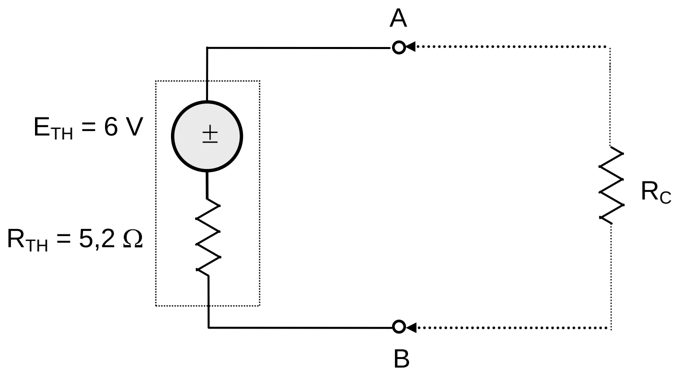
Para determinar R_{TH}, el circuito queda:



La resistencia de 2 Ω está en paralelo con la de 3 Ω, y este conjunto en serie con la de 4 Ω.

$$R_{TH} = \frac{2 \cdot 3}{2+3} + 4 = 5{,}20\ \Omega$$

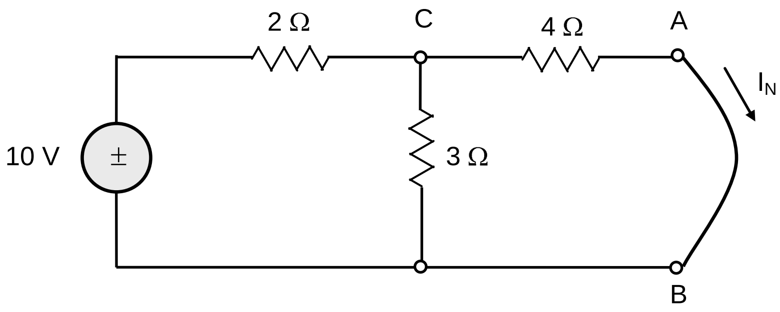
Por lo tanto el circuito equivalente es el siguiente:



Teorema de NORTON

La corriente en una rama de un circuito es la misma que se obtendría reemplazando el resto del circuito, por una fuente de corriente real independiente, cuyo valor "i_N", es la corriente que aparece al cortocircuitar los extremos de la rama considerada, y una resistencia en paralelo, cuyo valor es el de la resistencia que se ve desde los extremos de dicha rama (con la rama abierta) con las fuentes independientes **pasivadas.**

Consideremos el mismo ejemplo anterior y cortocircuitemos los terminales A-B



En el nodo C se cumple:

$$\frac{u_C - 10}{2} + \frac{u_C}{3} + \frac{u_C}{4} = 0$$

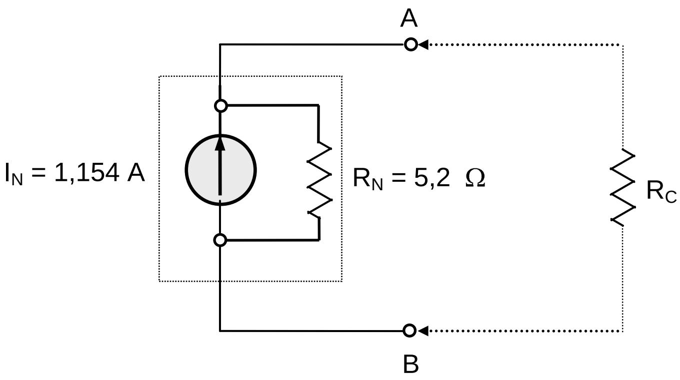
$$u_C = \frac{60}{13} = 4{,}615 \text{ V}$$

$$I_N = i_{CC} = \frac{u_C}{4} = \frac{4{,}615}{4} = 1{,}154 \text{ A}$$

La resistencia de Norton es igual a la de Thevenin por lo tanto:

$$R_N = \frac{2 \cdot 3}{2+3} + 4 = 5{,}20\,\Omega$$

Con lo que nos queda el siguiente circuito equivalente:



$$\text{Vemos que}: R_N = R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I_N}$$

Teorema de MILLMAN

En un circuito en el cual se encuentran varias fuentes reales en paralelo, las mismas pueden ser reemplazadas por otra fuente real. A tales efectos tomemos un circuito con dos fuentes reales en paralelo, según la figura 2.4.

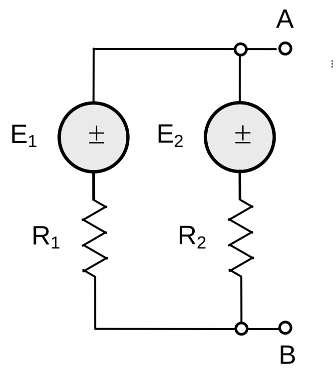


Figura 2.4 Circuito con dos fuentes reales en paralelo

Cada fuente de tensión real se puede reemplazar por una fuente de corriente real de acuerdo a la figura 2.5.

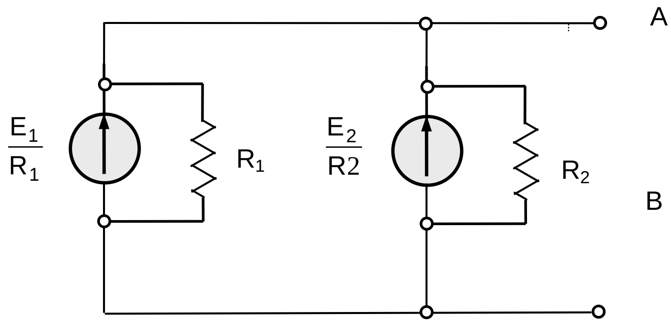
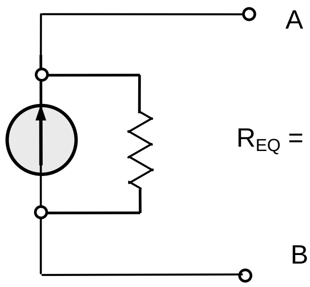


Figura 2.5 Circuito equivalente con fuentes de corriente

Dado que las fuentes de corriente están en paralelo, al igual que las resistencias el equivalente nos queda según la figura 2.6:

$$I_{EQ} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = E_1.G_1 + E_2.G_2$$

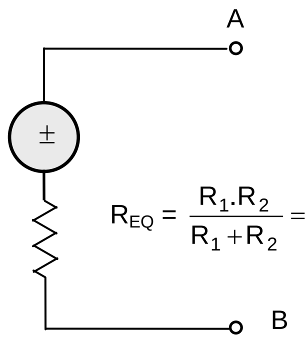


$$R_{EQ} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{G_1 + G_2}$$

Figura 2.6 Equivalente de las fuentes de corriente en paralelo

Si nuevamente transformamos la fuente de corriente equivalente en una fuente de tensión real, el esquema es el de la figura 2.7

$$E_{EQ} = (E_1.G_1 + E_2.G_2)\frac{1}{G_1 + G_2}$$



$$R_{EQ} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{G_1 + G_2}$$

Figura 2.7 Circuito equivalente resultante

Generalizando, la fuente de tensión real equivalente de varias fuentes reales en paralelo, se obtiene con una tensión y una resistencia equivalentes cuyos valores son los siguientes:

$$E_{EQ} = \frac{\sum E_i.G_i}{\sum G_i} \qquad R_{EQ} = \frac{1}{\sum G_i}$$

2.2 Principio de superposición

La respuesta de un circuito a un conjunto de excitaciones, es igual a la suma algebraica de las respuestas individuales, actuando cada excitación en forma independiente y pasivando las otras. Esto es valido para circuitos lineales.

Sea el ejemplo de la figura 2.8, en el cual queremos hallar la corriente i:

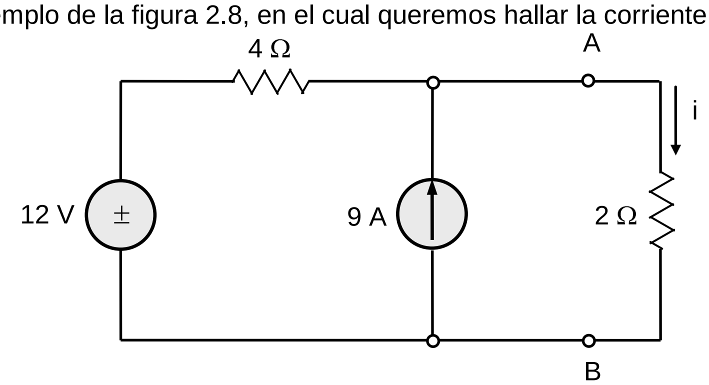
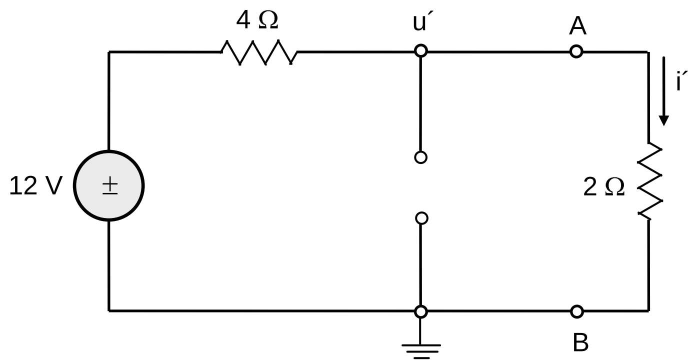


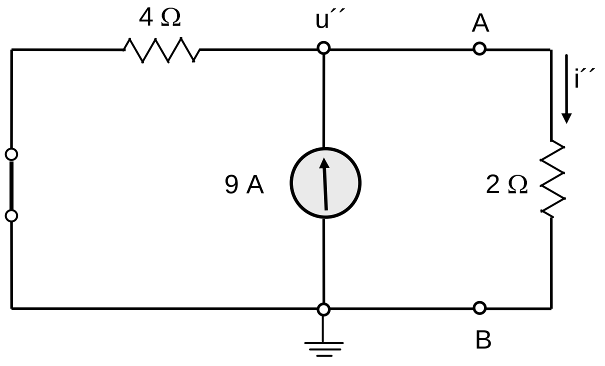
Figura 2.8 Circuito de análisis

a) Hacemos actuar la fuente de tensión pasivando la fuente de corriente:



$$i' = \frac{12}{4+2} = 2\ \text{A} \qquad u'_A = 2 \cdot 2 = 4\ \text{V}$$

b) Actuando la fuente de corriente y pasivando la fuente de tensión:



Aplicando el método de los nodos:

$$\frac{u_A''}{4} - 9 + \frac{u_A''}{2} = 0 \qquad u_A'' = 12\ \text{V}$$

$$i'' = \frac{12}{2} = 6\ \text{A}$$

Sumando ambos efectos obtenemos el valor deseado:

$i = i' + i'' = 2 + 6 = 8$ A

$u_A = u'_A + u''_A = 4 + 12 = 16$ V

2.4 Teoremas de reciprocidad

Teorema de reciprocidad

Una tensión aplicada en la rama de un circuito, produce una corriente en otra rama de dicho circuito. Si se coloca dicha fuente en esta segunda rama por la primera va a circular la misma corriente.

Tomemos el ejemplo de la figura 2.9

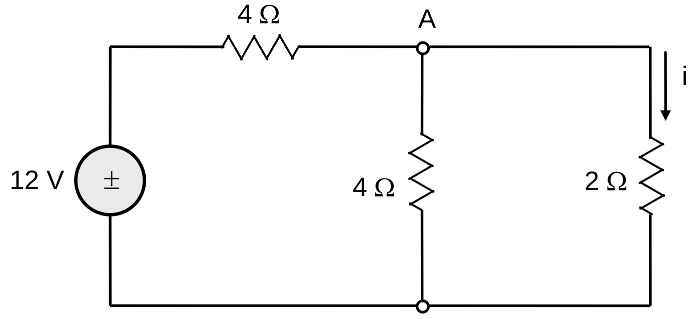


Figura 2.9 Circuito de análisis

Resolviendo por nodos

$$\frac{u_A - 12}{4} + \frac{u_A}{4} + \frac{u_A}{2} = 0 \qquad u_A = 3\ \text{V}$$

$$i = \frac{3}{2} = 1{,}5\ \text{A}$$

Coloquemos ahora la fuente de tensión en la rama analizada, según la figura 2.10.

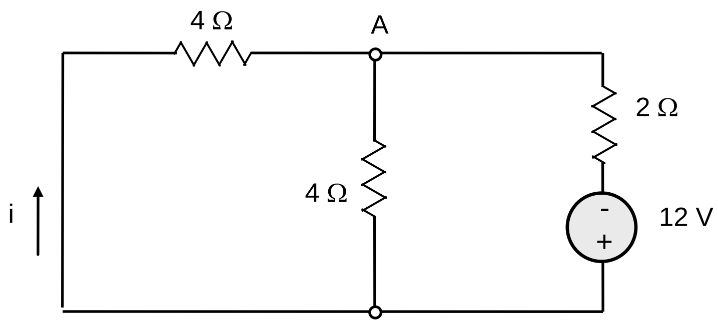


Figura 2.10 Circuito cambiando la fuente de tensión

$$\frac{u_A + 12}{2} + \frac{u_A}{4} + \frac{u_A}{4} = 0 \qquad u_A = -6\ \text{V}$$

$$i = -\frac{-6}{4} = 1{,}5\ \text{A}$$

2.5 Comportamiento energético de los circuitos

La potencia en una resistencia óhmica está dada por:

$$p[W] = u.i = \frac{u^2}{R} = u^2 \cdot G = i^2 \cdot R = \frac{i^2}{G} \quad \text{la cual se convierte totalmente en calor}$$

En el inductor y el capacitor la energía se acumula en forma de campo magnético y eléctrico (Campos conservativos) y cuando cesa la causa que la produce la restituye al circuito eléctrico. Esta energía tiene valores finitos y en general relativamente pequeños.

La expresión de la energía está dada por:

$$A = \int u.\ i.\ dt$$

Para el inductor su valor es: $A_L = \frac{L \cdot i^2}{2}$ y para el capacitor: $A_C = \frac{C \cdot u^2}{2}$

Efectos térmicos de la corriente eléctrica

La energía eléctrica convertida en una resistencia “R” puede ser muy grande para una potencia chica, siempre que el tiempo sea lo suficientemente grande (Es proporcional al tiempo).

$$A_R = \int p \cdot dt = u \cdot i \cdot t = R \cdot i^2 \cdot t = \frac{u^2}{R} t$$

La misma se mide en **Joule** [J],si la corriente es en Amper [A], la tensión en volt [V], la resistencia en Ohm [Ω] y el tiempo en segundos.

Se observa que para valores finitos de u, i y t la energía es finita y positiva.

En la resistencia la energía eléctrica se convierte en calor y de acuerdo a:

$$Q\ [\mathrm{Kcal}] = 0{,}239\ .10^{-3}.\ P.\ t = 0{,}239.\ 10^{-3}.\ R.\ i^2.\ t$$

2.6 Teorema de la Máxima transferencia de potencia

Si tenemos un generador real que alimenta una resistencia de carga, según se muestra en la figura 2.11, veamos en que condiciones se efectúa la máxima transferencia de potencia.

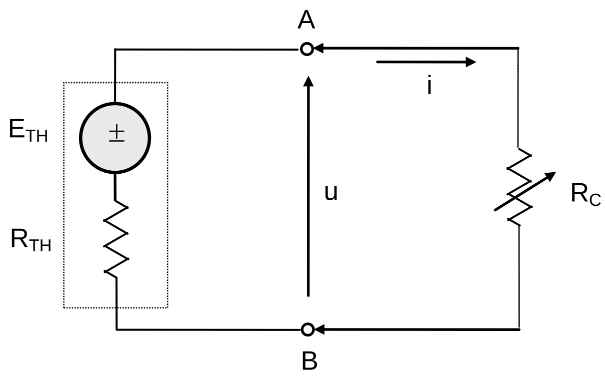


Figura 2.11 Circuito de análisis

La potencia que se transforma en la resistencia está dada por:

$$P = u\ .\ i = i^2\ R_C$$

$$i = \frac{e_{TH}}{R_{TH} + R_C}$$

$$P = \frac{E^2_{TH}}{(R_{TH} + R_C)^2} \cdot R_C$$

Para obtener el valor máximo de la potencia, derivamos esta expresión con respecto al elemento variable que es “R_C” y la igualamos a cero.

$$dp/dR_C = E^2_{TH}\ (R_{TH} + R_C)^{-2} - 2\ E^2_{TH}\ R_C\ (R_{TH} + R_C)^{-3} = 0$$

$$E^2_{TH} - 2\,E^2_{TH}\,R_C\,(R_{TH} + R_C)^{-1} = 0$$

$$E^2_{TH}\,[1 - 2\,R_C\,(R_{TH} + R_C)^{-1}] = 0$$

$$1 = 2\,R_C\,(R_{TH} + R_C)^{-1}$$

$$R_{TH} + R_C = 2\,R_C$$

$$\boxed{R_C = R_{TH}}$$

Se debe cumplir que la resistencia de carga sea igual a la resistencia interna del generador. En este caso la potencia tiene el siguiente valor:

$$p_{max} = \frac{E^2_{TH}}{(2\cdot R_C)^2}\cdot R_C = \frac{E^2_{TH}}{4\cdot R_C} = \frac{E^2_{TH}}{4\cdot R_{TH}}$$

En la figura 2.12 se observa la variación de la potencia transferida en función de l valor de la resistencia de carga.

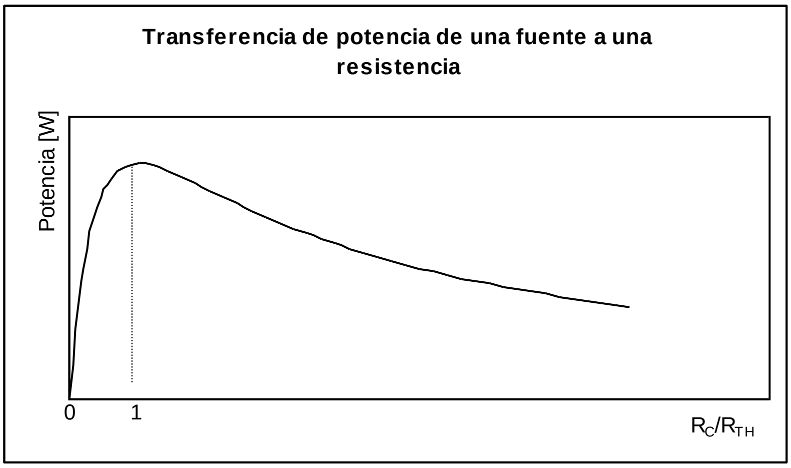


Figura 2.12 Potencia transferida en función de la resistencia de carga

Rendimiento para máxima transferencia de potencia

Definimos como rendimiento de un sistema la relación de potencia de salida ó útil, a la potencia de entrada o absorbida.

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} \quad \text{en nuestro caso :} \quad P_u = R_C \cdot i^2 \quad \text{y} \quad P_{abs} = e_{TH} \cdot i$$

$$\eta = \frac{R_C \cdot i^2}{E_{TH} \cdot i} = \frac{R_C \cdot i}{E_{TH}} = \frac{R_C \cdot E_{TH}}{E_{TH} \cdot 2 \cdot R_C} = 0{,}50$$

2.7 Transformación estrella - triángulo

Agrupamiento en estrella y triángulo. Equivalencia.

Tres resistencias pueden ser conectadas uniendo uno de sus terminales en un punto común, denominando a dicha agrupación **"estrella".** También se la conoce como interconexión **"T"**, dependiendo su designación en la forma de dibujarlas, según lo mostrado en la figura 1.27.

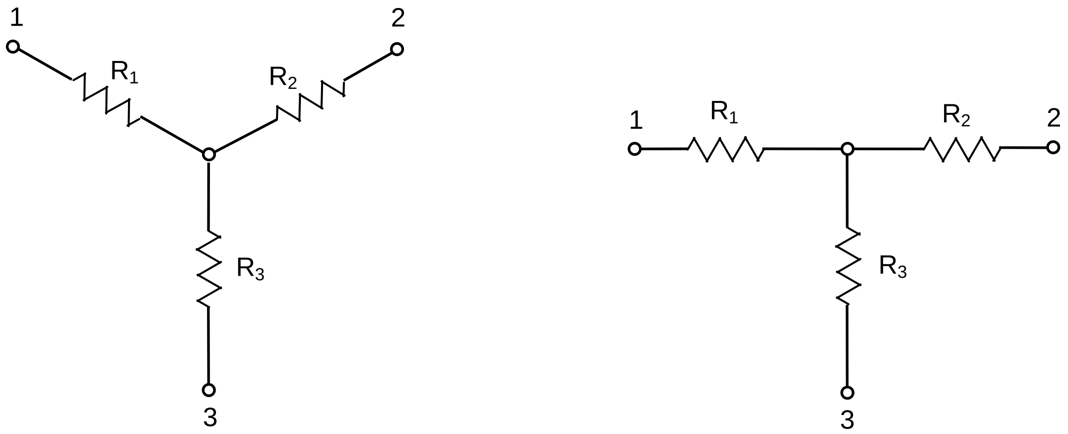


Figura 1.27 Agrupamiento "estrella" o "T"

Otro tipo de agrupamiento surge de unir los terminales de las resistencias de a pares siendo su designación "**Triángulo"** ó **"Pi"** y de acuerdo al esquema de la figura 1.28

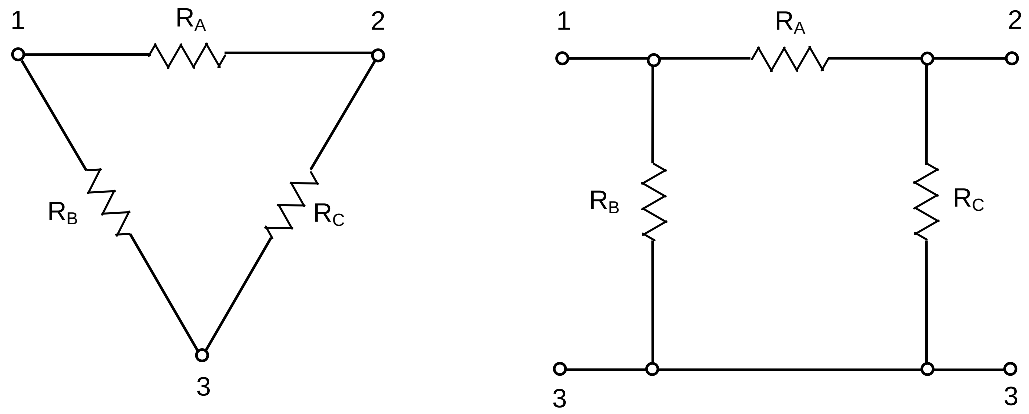


Figura 1.28 Agrupamiento "Triángulo" ó "π"

En circuitos en los cuales aparece este tipo de agrupamientos, por simplificación del mismo es más conveniente trabajar con una agrupación u otra, sustituyendo una por otra, sin modificar la equivalencia eléctrica. Las resistencias equivalentes deben ser tales, que el valor que presentan entre dos terminales cualesquiera, tengan el mismo valor.

Si tomamos los terminales 1 y 2, la resistencia que presenta para el agrupamiento en estrella, es la suma de las resistencias R_1 y R_2**.** En cambio en el agrupamiento triángulo, es el paralelo de la resistencia R_C con ($R_A + R_B$). Luego nos queda:

1 S

Terminales	Estrella	Triángulo
1 - 2	$R_1 + R_2$	$\frac{R_A (R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$
2 - 3	$R_2 + R_3$	$\frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$
1 - 3	$R_1 + R_3$	$\frac{R_B (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$

Aquí tenemos planteado tres sistemas de ecuaciones, con tres incógnitas ya sea que tengamos los valores de las resistencias conectadas en estrella y queramos su equivalente en triángulo ó viceversa.

Transformación de un sistema en estrella a su equivalente en triángulo

Conociendo los valores de las resistencias en estrella, los equivalentes en triángulo son:

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1}$$

Transformación de un sistema en triángulo a su equivalente en estrella

Conociendo los valores de las resistencias en triángulo, los equivalentes en estrella son:

$$R_1 = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B + R_C} \qquad R_2 = \frac{R_A \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad R_3 = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$